Τρίτη, 7 Νοεμβρίου 2017

Πρόταση

Αν $P_{ij}(s)=\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n$ και $F_{ij}(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$, με $|s|<1$, τότε

$$F_{ij}(s)=\frac{P_{ij}(s)}{1+P_{jj}(s)} \quad \text{και} \quad P_{ij}(s)=\frac{1}{1-F_{ij}(s)}F_{ij}(s)$$

Απόδειξη

$p_{ij}^{(1)}=f_{ij}^{(1)}$

*Από το i θέλω να πάω στο j σε 2 βήματα

⇓

- Είτε θα φτάσω πρώτη φορά στο j στο 2ο βήμα
- Είτε θα φτάσω πρώτη φορά στο j στο πρώτο βήμα και θα παραμείνω εκεί.

*$p_{ij}^{(2)}=f_{ij}^{(2)}+f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(1)}$

$p_{ij}^{(3)}=f_{ij}^{(3)}+f_{ij}^{(2)}p_{jj}^{(1)}+f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(2)}$

↓

1η φορά στο j → είτε στο 3ο βήμα

→ είτε στο 2ο και μετά να παραμείνω

→ είτε στο 1ο βήμα και μετά $j \to j$ σε δύο βήματα

$$P_{ij}^{(4)} = f_{ij}^{(4)} + f_{ij}^{(3)} P_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(2)} P_{jj}^{(2)} + f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(3)}$$

Για να φτιάξω το $P_{ij}(s)$, πολ/ζω την κάθε σχέση με $s^1, s^2, \dots$ αντίστοιχα και παίρνω άθροισμα:

$$s^1 \cdot P_{ij}^{(1)} = f_{ij}^{(1)}$$

$$s^2 \cdot P_{ij}^{(2)} = f_{ij}^{(2)} + f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(1)}$$

$$s^3 \cdot P_{ij}^{(3)} = f_{ij}^{(3)} + f_{ij}^{(2)} P_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(2)}$$

$$s^4 \cdot P_{ij}^{4} = f_{ij}^{(4)} + f_{ij}^{(3)} \underbrace{P_{jj}^{(1)}}_{\text{κοινός παράγοντας}} + f_{ij}^{(2)} \underbrace{P_{jj}^{(2)}}_{\text{κοινός παράγοντας}} + f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(3)}$$

$F_{ij}(s)$

$$P_{ij}(s) = F_{ij}(s) + P_{jj}^{(1)} s \cdot F_{ij}(s) + P_{jj}^{(2)} s^2 F_{ij}(s) + P_{jj}^{(3)} s^3 F_{ij}(s) =$$

$$= F_{ij}(s)\left(1 + P_{jj}^{(1)} \cdot s + \dots\right) = F_{ij}(s)\left(1 + P_{jj}(s)\right) \quad ①$$

$$\overset{①}{\Longrightarrow} F_{ij}(s) = \frac{P_{ij}(s)}{1 + P_{jj}(s)}$$

Στην ① θέτω $i=j$, τότε

$$P_{jj}(s) = F_{jj}(s)\left(1 + P_{jj}(s)\right) \Rightarrow P_{jj}(s) = \frac{F_{jj}(s)}{1 - F_{jj}(s)} \quad ②$$

$$\xRightarrow{①,②} P_{ij}(s) = F_{ij}(s)\left(1 + \frac{F_{jj}(s)}{1 - F_{jj}(s)}\right)$$

ΛΗΜΜΑ ΑBEL

Έστω $\{c_k\}$ ακολουθία μη αρνητικών όρων

Αν $c(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k$ συγκλίνει για $|s| < 1$, τότε $\lim_{s \to 1} c(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $j \in S$ κατάσταση μιας στατικής Μ.Α

i) j παροδική αν-ν η $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ συγκλίνει και τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ συγκλίνει

ii) j επ/κη αν-ν η $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ αποκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ αποκλίνει $\forall i$ για το οποίο $i \to j$

Απόδειξη

i) j παροδική αν-ν $f_{jj}^{*} < 1$

ισοδύναμα σημαίνει ότι $F_{jj}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = F_{jj}(1) < 1$

Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = P_{jj}(1) = \dfrac{F_{jj}(1)}{1-F_{jj}(1)} < \infty$

Άρα συγκλίνει!

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1) = \dfrac{F_{ij}(1)}{1-F_{ij}(1)} < \infty$

Άρα κι αυτή συγκλίνει!

(ii) j επαναληπτική αν-ν $f_{jj}^{*} = 1$

ισοδύναμα σημαίνει ότι $F_{jj}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = F_{jj}(1) = 1$

Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = P_{jj}(1) = \dfrac{F_{jj}(1)}{1-F_{jj}(1)} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

<∞, όταν i→j

Άρα, αποκλίνει!

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1) = \frac{F_{ij}(1)}{1-F_{jj}(1)} = \frac{\quad}{0}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι αν j είναι παροδική τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ συγκλίνει, καθώς και η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$ συγκλίνει. Αυτό μας οδηγ στο ότι $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$ και $\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = 0$. Επομένως, οι οριακές πιθανότητ για τις παροδικές καταστάσεις είναι 0

ΘΕΩΡΗΜΑ (χωρίς απόδειξη)

Έστω $j \in S$ μια επαν/κή κατάσταση που είναι ταυτόχρονα απεριοδικ (dj = 1) και έστω $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ ο μέσος χρόνος επανάληψης της j.

Τότε, $\lim p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$ και $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{F_{ij}(1)}{\mu_j}$

$F_{ij}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$

επαναληπτική → $\sum f_{jj}^{(n)} = 1$

επαναληπτική → $\sum p_{jj}^{(n)}$ αποκλίνει

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Αν η j ασαφώς επ/κή και απεριοδική, τότε οι οριακές πιθανότητες κάνουν 0, γιατί $\mu_j = +\infty$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ

Οι οριακές πιθανότητες για τις περιοδικές και ασαφώς επαναληπτικές είναι 0. Επομένως, μένει να δω τι γίνεται για τις απεριοδικές που είναι και θετικώς. Επιπλέον, παραμένει το ερώτημα πώς κοιτώντας τον πίνακα P αν οι καταστάσεις είναι παροδικές ή επαναληπτικές. Σε αυτό το ερώτημα θα βοηθήσουν οι επόμενες δύο προτάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Αν $i \in S$ επαν/κή και $i \longrightarrow j$, τότε $j \to i$ (εξ ορισμού)

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Αν $i \in S$ επαν/κή και $i \longrightarrow j$, τότε j επαναληπτική

Αυτό σημαίνει ότι από επαν/κές καταστάσεις, μόνο επαν/κές καταστάσεις είναι προσιτές

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$i \longrightarrow j$ σημαίνει $(\exists u \geq 0)\ p_{ij}^{(u)} > 0$

Από προηγούμενη πρόταση, καθώς i επαν/κή, έχουμε ότι $j \to i$, δηλαδή $(\exists w \geq 0)\ p_{ji}^{(w)} > 0$

Από προηγούμενη πρόταση, i επαν/κή αν-ν $\sum_{\ell=1}^{\infty} p_{ii}^{(\ell)}$ αποκλίνει

Θέλω νδο j επαν/κή $\longrightarrow$ αρκεί νδο $\sum_{\ell=1}^{\infty} p_{jj}^{(\ell)}$ αποκλίνει

$$p_{jj}^{(\ell+u+w)} \geq p_{ji}^{(w)}\, p_{ij}^{(u)}\, p_{ii}^{(\ell)}$$

Ξέρω κάτι γι' αυτά

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Αν j [redacted] ασθενώς επ/κή και απεριοδική, τότε οι οριακές πιθανότητες κάνουν 0, γιατί $\mu_j = +\infty$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ

Οι οριακές πιθανότητες για τις περιοδικές και ασθενώς επαναληπτικές είναι 0. Επομένως, μένει να δω τι γίνεται για τις απεριοδικές που είναι και θετικώς. Επιπλέον, παραμένει το ερώτημα πώς κοιτώντας τον πίνακα P αν οι καταστάσεις είναι παροδικές ή επαναληπτικές. Σε αυτό το ερώτημα θα βοηθήσουν οι επόμενες δύο προτάσεις

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Αν $i \in S$ επαν/κή και $i \to j$, τότε $j \to i$ (εξ ορισμού)

Προταση 2

Αν $i\in S$ επαν/κη και $i\to j$, τοτε j επαναληπτικη
Αυτο συμβαινει οτι απο επαν/κες καταστασεις, μονο επαν/κες καταστασεις ειναι προσιτες

Αποδειξη

$i\to j$ συμβαινει $(\exists n\geq 0)\ P_{ij}^{(n)}>0$

Απο προηγουμενη προταση, καθως i επαν/κη, εχουμε οτι $j\to i$, δηλαδ $(\exists m\geq 0)\ P_{ji}^{(m)}>0$

Απο προηγουμενη προταση, i επαν/κη αν-ν $\sum_{l=1}^{\infty} P_{ii}^{(l)}$ αποκλινει

Θελω νδο j επαν/κη $\longrightarrow$ αρκει νδο $\sum_{l=1}^{\infty} P_{jj}^{(l)}$ αποκλινει

$$P_{jj}^{(l+n+m)} \geq P_{ji}^{(m)}\ P_{ij}^{(n)}\ P_{ii}^{(l)}$$

ξερω κατι
γι'αυτά

$$\sum_\ell p_{jj}^{(\ell+n+m)} \geq \sum_\ell p_{ji}^{(m)}\, p_{ij}^{(n)}\, p_{ii}^{(\ell)} = \underset{>0}{p_{ji}^{(m)}}\, \underset{>0}{p_{ij}^{(n)}}\, \underbrace{\sum_\ell p_{ii}^{(\ell)}}_{\text{αποκλίνει}}$$

$$\sum_\ell p_{jj}^{(\ell+m+n)} \leq \sum_{\ell=1} p_{jj}^{(\ell)}$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=1} p_{jj}^{(\ell)} \text{ αποκλίνει}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε μία κλάση ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων, όλες οι καταστάσεις είναι του ίδιου τύπου, δηλαδή ή όλες παροδικές ή όλες ασαφώς επαν/κές ή όλες θετικώς επαν/κές. Επιπλέον, όλες έχουν την ίδια περίοδο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1) Έστω i παροδική και $i \leftrightarrow j$, τότε j παροδική

Γιατί, έστω j επαν/κή και καθώς $j \to i$, τότε, από προηγ. πρόταση, i επαν/κή $\Longrightarrow$ Άτοπο.

ii) Έστω i επ/κη και $i \leftrightarrow j$ τότε j επ/κη από προηγούμενη πρόταση

Έστω i ασαφώς επαν/κη, τότε θδο j ασαφώς επαν/κη

$i \to j$, δηλ. $(\exists k \geq 0)\ p_{ij}^{(k)} > 0$

$j \to i$, δηλ $(\exists m \geq 0)\ p_{ji}^{(m)} > 0$

i ασαφώς επαν/κη συμβαίνει $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$

j ασαφώς επαν/κη αρκεί νδο οριακή πιθανότητα = 0

$$p_{ii}^{(k+m+n)} \geq \underbrace{p_{ij}^{(k)}}_{>0}\ \underbrace{p_{ji}^{(m)}}_{>0}\ p_{jj}^{(n)}$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(k+n+m)} \geq \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(m)} p_{jj}^{(n)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$$

18

ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια μη διαχωρίσιμη Μ.Α με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων είναι θετικώς επαναληπτική

Αποδειξη

Εστω $j \in S$ ασαφώς επαναληπτική ή παροδική, τοτε $\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = 0$

S πεπερασμένο πλήθος καταστασεων, εστω k

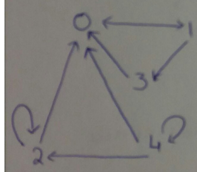
Αυτό σημαίνει οτι $\sum_{i=1}^{k} P_{ij}^{(n)} = 1$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} P_{ij}^{(n)} = 1$ Ατοπο!

Παραδειγμα

Εστω πινακας μετάβασης

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$



διαχωρίσιμη Μ.Α.

$2 \to 0$ αλλά $0 \not\to 2 \Rightarrow 2$ παροδική

$4 \to 3$ αλλα $3 \not\to 4 \Rightarrow 4$ παροδική

$\pi_2 = 0$

$\pi_4 = 0$ (γιατί είναι παροδικές)

Οι 0, 1, 3 είναι του ίδιου τύπου, αποτελούν μία νέα Μ.Α. πεπερασμένου πλήθους καταστάσεων, άρα οι 0, 1, 3 είναι θετικώς επαναληπτικές.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια μη διαχωρίσιμη Μ.Α με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων είναι [redacted]ς θετικώς επαναληπτική

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $j \in S$ ασαφώς επαναληπτική ή παροδική, τότε $\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = 0$

S πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων, έστω k.

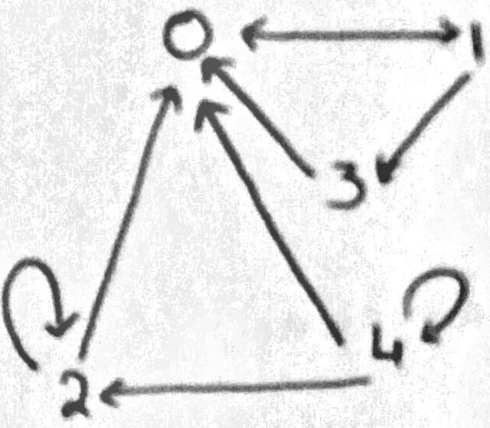
Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{j=1}^{k} P_{ij}^{(n)} = 1$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} P_{ij}^{(n)} = 1$ ΑΤΟΠΟ!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

·Έστω πίνακας μετάβασης

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$



διαχωρίσιμη Μ.Α.

$2 \to 0$ αλλά $0 \not\to 2 \Rightarrow 2$ παροδική

$4 \to 3$ αλλά $3 \not\to 4 \Rightarrow 4$ παροδική

$\pi_2 = 0$

(γιατί είναι παροδικές)

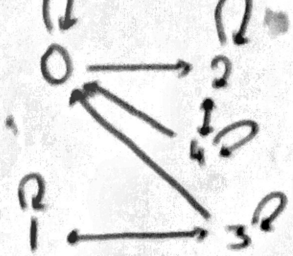
$\pi_4 = 0$

Οι 0, 1, 3 είναι του ίδιου τύπου, αποτελούν μία νέα Μ.Α. πεπερασμένου πλήθους καταστάσεων, άρα οι 0, 1, 3 είναι θετικώς επαναληπτικές.

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας μετάβασης

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 3 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array}$$



$1 \to 0$, αλλά $0 \not\to 1 \Rightarrow$ 1 παροδική $\Rightarrow \pi_1 = 0$

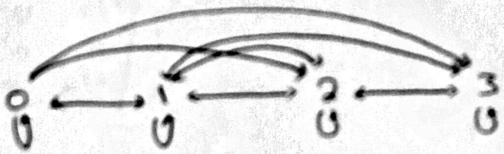
$3 \to 0$, αλλά $0 \not\to 3 \Rightarrow$ 3 παροδική $\Rightarrow \pi_3 = 0$

διαχωρίσιμη Μ.Α γιατί δεν επικοινωνούν όλες οι καταστάσεις μεταξύ τους

Οι 0, 2, 4 είναι κλειστό κύκλωμα επικοινωνούντων καταστάσεων που αποτελούν μια νέα Μ.Α.

Παράδειγμα

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \hline 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 1 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 2 & \vdots & b_0 & b_1 & \cdots \\ 3 & \vdots & \vdots & b_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$



μη διαχωρίσιμη Μ.Α

όλες οι καταστάσεις είναι ίδιου τύπου